

Info: Des détails sur l'examen blanc (14 novembre) arriveront lundi

Rappels: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$
 ε aussi petit que je veux
pour n suffisamment proche de $+\infty$
 x_n est proche de l

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, |f(x) - l| \leq \varepsilon$
 ε aussi petit que je veux
pour x suffisamment proche de x_0
 $f(x)$ est proche de l

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, f(x) \geq M$
 M aussi grand que je veux.
pour x suffisamment proche de x_0
 $f(x)$ est proche de $+\infty$

Définition 4.21

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 . Alors, on dit que

(i) f tend vers l'infini quand x tend vers x_0 si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, \quad f(x) \geq M.$$

On note alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

(ii) f tend vers moins l'infini quand x tend vers x_0 si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, \quad f(x) \leq -M$$

On note alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Remarque 4.22

Si f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers x_0 ,
la limite de f n'existe pas en x_0

Exemple 4.23

(i) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0
tq $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ & $\exists \delta_0 > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$,
 $f(x) > 0$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+$)

Alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(H1) : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, $|f(x)| < \varepsilon$

(H2) $\exists \delta_0 > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, $f(x) > 0$.

AM : $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, $\frac{1}{f(x)} \geq M$.

Soit $M > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{M}$. Alors, par (H1), soit $\delta_1 > 0$ tq
 $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta_1[\setminus \{x_0\}$, $|f(x)| \leq \varepsilon$.

Pour (H2), soit $\delta_0 > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\setminus \{x_0\}$, $f(x) > 0$.

Posons $\delta = \min \{ \delta_0, \delta_1 \} > 0$. Soit $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ quelconque

On a

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{|f(x)|} \geq \frac{1}{\varepsilon} = M.$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x) > 0$ $|f(x)| \leq \varepsilon$

M étant quelconque, on a le résultat.

(ii) si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^-$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

(iii) si $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Proposition 4.24 ("changement de variables")

soient $x_0, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 , $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de l_1 , tq:

(i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$

(ii) $\lim_{x \rightarrow l_1} g(x) = l_2$

(iii) $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, $f(x) \neq l_1$

Alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = l_2$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(\underbrace{f(x)}_{y \rightarrow l_1}) \stackrel{?}{=} \lim_{y \rightarrow l_1} g(y).$

Example 4.25:

(i) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$. On utilise $1 - \cos(x) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

On sait que $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$

Var que $x \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \neq 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(y)}{y} \cdot \frac{\sin(y)}{y}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

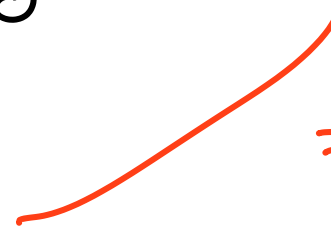
(ii) Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = 0, \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 14 & \text{si } x \neq 0 \\ 58 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} 58 = 58$$

Orce $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \stackrel{?}{=} \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 14$$

 $\neq$



§4.3 limites latérales et à l'infini

$\lim_{x \rightarrow 0} \log(x)$ n'a pas de sens!

Définition 4.26 (lire poly page 83)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x)$ a un sens.

But : définir $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$\lim$ $f(x) = l$: $\forall \varepsilon > 0$, $\boxed{\quad ? \quad}$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$x \rightarrow x_0$	$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$	)
$x \rightarrow x_0^+$	$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$	
$x \rightarrow x_0^-$	$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$	
$x \rightarrow +\infty$	$\exists M \geq 0$ tq $\forall x \geq M$	
$x \rightarrow -\infty$	$\exists M \geq 0$ tq $\forall x \leq -M$	

Remarque 4.27

une fonction est définie au voisinage d'un point si et seulement si elle est définie à gauche et à droite.

De plus, f admet une limite en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ & $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ existent et sont égaux

Exemple 4.28

(i) soit la fonction de Heaviside : $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x < 0}} H(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} H(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

(ii) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des paramètres et $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x < 0 \\ b \sin(x) + a \cdot \cos(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Pour quels a, b $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe ?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x < 0}} ax+b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} b \cdot \sin(x) + a \cdot \cos(x) = b \cdot 0 + a \cdot 1 = a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow b = a.$$

Definition 4.29 (a line poly exp p. 85) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ or $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$: $\boxed{?}$ $\boxed{?}$ $\boxed{?}$

$$x \rightarrow x_0$$

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$$

$$x \rightarrow x_0^+$$

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

$$x \rightarrow x_0^-$$

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\exists M > 0 \text{ tq } \forall x \geq M$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\exists M > 0 \text{ tq } \forall x \leq -M$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0$$

$$f(x) \geq M$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0$$

$$f(x) \leq -M.$$

Exemple 4.30

Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Montrons que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$
n'existe pas.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

AM: $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]0, \delta[$, $f(x) \geq M$.

Soit donc $M > 0$ quelconque. Posons $\delta = \frac{1}{M}$. Soit $x \in]0, \delta[$ quelconque. Alors,

$$f(x) = \frac{1}{x} \underset{\uparrow}{\geq} \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{1}{M}} = M. \quad \text{qui est le résultat voulu.}$$

$$x \in]0, \delta[, \quad 0 < x < \delta \quad \Leftrightarrow x, \quad \Leftrightarrow \delta$$

$$0 < \frac{1}{\delta} < \frac{1}{x}$$